

**Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет)»**

**УТВЕРЖДЕНО**

**Директор физтех-школы  
прикладной математики и  
информатики**

**А.М. Райгородский**

**Рабочая программа дисциплины (модуля)**

**по дисциплине:** Дискретная математика

**программа аспирантуры:** Физические науки

кафедра дискретной математики

**курс:** 1

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 30 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 48 час.

Всего часов: 78, всего зач. ед.: 2

Количество контрольных работ, заданий: 2

Программу составил: А.С. Нагорный, канд. физ.-мат. наук, доцент

Программа обсуждена на заседании кафедры дискретной математики 06.06.2022

## Аннотация

Сравнительно молодая научная дисциплина «Дискретная математика» возникла в начале XX века, но уже успела стать классической. Она включает в себя множество разделов – теорию множеств, математическую логику, теорию чисел, теорию графов, теорию кодирования, теорию функциональных систем, теорию алгоритмов, комбинаторный анализ, еще много других разделов.

Понятия дискретной математики и методы решения дискретных задач лежат в основе не только большого количества важных прикладных дисциплин, но и некоторых теоретических наук – таких, как информатика, кибернетика, криптография, которые всё глубже и глубже проникают не только в науку и технику, но и в нашу повседневную жизнь.

Дискретность (от лат. discretus – отделённый, прерывистый) часто употребляют как антоним непрерывности. Однако при решении сложных практических задач дискретные и непрерывные методы нередко используются совместно и весьма эффективно, взаимно обогащая друг друга.

Данный курс включает в себя достаточно глубокий экскурс в теорию функциональных систем (включая функции алгебры логики, функции многозначной логики и теорию автоматных функций), знакомство с некоторыми классическими алгоритмами (с оценками их сложности), здесь также формулируются и доказываются основные результаты теории синтеза управляющих систем (на примере ДНФ, КС и СФЭ). Наконец, в конце курса будут освещены некоторые (избранные) комбинаторные вопросы, связанные с геометрией булева куба. Несомненно, эти знания будут полезны аспирантам и специалистам в самых разных математических областях.

## 1. Цели и задачи

### Цель дисциплины

Познакомить слушателей с понятиями дискретной математики и методов решения дискретных задач, лежащих в основе не только большого количества важных прикладных дисциплин, но и некоторых теоретических наук – таких, как информатика, кибернетика, криптография.

### Задачи дисциплины

- актуализировать знания ключевых понятий из предшествующих дисциплин, особенно важные для дискретной математики;
- ознакомить обучающихся с основными современными задачами дискретной математики и математической кибернетики, возникающими в различных областях,
- научить обучающихся выбирать наиболее подходящий метод для решения поставленных перед ними задач.

## 2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

- Математическое программирование.
- Исследование операций, теория игр.
- Оптимальное управление.
- Дискретная оптимизация.
- Теория функциональных систем.
- Комбинаторный анализ и теория графов.
- Теория кодирования.
- Управляющие системы.
- Дизъюнктивные нормальные формы.
- Синтез и сложность управляющих систем.
- Эквивалентные преобразования управляющих систем.
- Надежность и контроль функционирования управляющих систем.
- Математическая экономика.

уметь:

- ☐ эффективно использовать на практике теоретические компоненты науки: понятия, суждения, умозаключения, законы.
- ☐ представить панораму методов прикладной дискретной математики.
- ☐ использовать современные средства создания комплексов программ.
- ☐ абстрагироваться от несущественного при математическом моделировании.
- ☐ выбирать методы дискретной математики и кибернетики, подходящие для решения той или иной задачи.

владеть:

Владеть методами следующих дисциплин.

- Математическое программирование.
- Исследование операций, теория игр.
- Оптимальное управление.
- Дискретная оптимизация.
- Теория функциональных систем.
- Комбинаторный анализ и теория графов.
- Теория кодирования.
- Управляющие системы.
- Дизъюнктивные нормальные формы.
- Синтез и сложность управляющих систем.
- Эквивалентные преобразования управляющих систем.
- Надежность и контроль функционирования управляющих систем.

### 3. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

#### 3.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Функции алгебры логики	5			8
2	Функции многозначной логики	5			8
3	Автоматы-преобразователи (о.-д. функции)	5			8
4	Алгоритмы и их сложность	5			8
5	Синтез управляющих систем	5			8
6	Геометрия булева куба (избранные вопросы)	5			8
Итого часов		30			48
Подготовка к экзамену		0 час.			
Общая трудоёмкость		78 час., 2 зач.ед.			

#### 3.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 1 (Осенний)

##### 1. Функции алгебры логики

1. Элементарные функции алгебры логики. Суперпозиция функций. Замыкание, замкнутые классы функций. Классы  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $L$ ,  $S$ ,  $M$ , их замкнутость.
2. Теорема Поста о полноте в  $P_2$  (с доказательством).

3. Понятия базиса и предполного (максимального) класса в алгебре логики. Следствия из теоремы Поста о полноте.

4. Характеризация функций алгебры логики по предполным классам. Алгоритм получения всех тупиковых аксиом вложения. Алгоритм получения всех типов базисов. Решетка пересечений предполных классов алгебры логики.

## 2. Функции многозначной логики

1. Функции многозначной логики. Предикаты. Замкнутость класса функций, сохраняющих заданный предикат.

2. Теорема Кузнецова и следствие из нее. Теорема Янова-Мучника.

3. Предикатное описание предполных классов функций многозначной логики. Теорема Розенберга (без доказательства).

4. Предикатное описание и свойства предполных классов трехзначной логики. Свойства элементарных функций трехзначной логики. Примеры аксиом вложения.

5. Предикатное описание и свойства предполных классов четырехзначной логики. Свойства элементарных функций четырехзначной логики. Примеры аксиом вложения.

## 3. Автоматы-преобразователи (о.-д. функции)

1. Детерминированные функции как функции, переводящие детерминированным образом счётные последовательности символов входного алфавита в счётные последовательности символов выходного алфавита. Определение, примеры детерминированных и не детерминированных функций.

2. Определение веса детерминированной функции. Ограниченно-детерминированные (автоматные) функции (о.-д. функции). Примеры детерминированных функций бесконечного веса.

3. Способы задания о.-д. функций: диаграмма Мура, каноническая таблица, система канонических уравнений, схемы из функциональных элементов и элементов единичной задержки.

4. Переход от одной канонической формы задания автомата к любой другой (канонической).

5. Понятие эксперимента в теории автоматов. Теорема Мура для двух отличимых состояний автомата. Теорема Мура для двух автоматов.

## 4. Алгоритмы и их сложность

1. Принцип «Разделяй и властвуй!» в теории алгоритмов. Сложность задачи одновременного поиска максимального и минимального элемента в массиве.

2. Задача умножения  $n$ -разрядных двоичных чисел, ее сложность. Теорема о решении рекуррентных соотношений для сложности алгоритмов.

3. Важность балансировки в алгоритмах типа «Разделяй и властвуй!». Алгоритмы сортировки элементов массива, их сложность. Алгоритм сортировки слиянием, доказательство его оптимальности.

4. Принцип динамического программирования. Задача об оптимальном порядке умножения  $n$  матриц.

5. Паросочетания при линейных предпочтениях участников (обобщенные паросочетания). Алгоритм поиска устойчивого паросочетания, его сложность.

6. Порядковые статистики. Алгоритм выбора  $k$ -го наименьшего элемента, его сложность.

## 5. Синтез управляющих систем

1. Задача синтеза управляющих систем на примере класса дизъюнктивных нормальных форм (ДНФ), контактных схем (КС) и схем из функциональных элементов (СФЭ) в стандартном базисе.

2. Сокращенная ДНФ и методы ее построения. Анализ простейших алгоритмов синтеза КС.

3. Контактное дерево. Универсальный многополюсник. Метод Шеннона построения КС, его сложность в худшем случае.

4. Метод каскадов построения КС и СФЭ в стандартном базисе для систем функций алгебры логики.
5. Оценка сложности шифратора, дешифратора, мультиплексора и универсального многополюсника в классе СФЭ в стандартном базисе.
6. Функция Шеннона для классов КС и СФЭ в стандартном базисе. Асимптотически наилучший метод синтеза КС и СФЭ. Теорема Лупанова (без доказательства). Результаты С.В. Яблонского о сложности почти всех функций алгебры логики.
7. Оценка числа КС и СФЭ в стандартном базисе. Нижняя оценка функции Шеннона.
8. Примеры получения результатов об асимптотике функции Шеннона для специальных классов функций.
9. Эффект Шеннона. Полуэффект Шеннона на примере задачи синтеза ДНФ.

#### 6. Геометрия булева куба (избранные вопросы)

1. Среднее значение количества допустимых (максимальных, ядровых) граней размерности  $k$  в характеристическом множестве функции алгебры логики от  $n$  переменных.
2. Дисперсия количества допустимых (максимальных, ядровых) граней размерности  $k$  в характеристическом множестве функции алгебры логики от  $n$  переменных. Число импликант (простых импликант, ядровых импликант) у почти всех функций алгебры логики от  $n$  переменных.
3. Теорема о мощности характеристического множества почти всех функций алгебры логики от  $n$  переменных.
4. Цепные и циклические функции. Оценки (верхняя и нижняя) максимально возможной длины цепи (цикла) в  $n$ -мерном булевом кубе. Протяженность связной булевой функции.

#### 4. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная компьютером и мультимедийным оборудованием (проектор, звуковая система).

#### 5. Перечень рекомендуемой литературы

##### Основная литература

1. Дискретная математика [Текст] : графы, матроиды, алгоритмы : учеб. пособие для вузов / М. О. Асанов, В. А. Баранский, В. В. Расин .— Ижевск : НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001 .— 288 с.
2. Дискретная математика [Электронный ресурс] : графы, матроиды, алгоритмы : учеб. пособие / М. О. Асанов, В. А. Барановский, В. В. Расин .— 3-е изд., стереотип. — СПб. : Лань, 2020 .— (Учебники для вузов. Специальная литература) .— Электрон. версия печ. публикации .— Полный текст (Доступ из сети МФТИ / Удаленный доступ).

##### Дополнительная литература

1. Элементы математической кибернетики и дискретной математики [Текст] = учеб. пособие для вузов / А. А. Бурцев ; М-во образования и науки РФ, Моск. физ.-техн. ин-т (гос. ун-т) .— М. : МФТИ, 2012 .— 160 с.

#### 6. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

Не используются

#### 7. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

В процессе самостоятельной работы обучающиеся могут использовать программные средства MATLAB, Mathcad, Wolfram Mathematica.

## **8. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)**

Для успешного освоения курса от студентов требуется самостоятельная работа в объеме не менее чем те часы, которые указаны для каждого раздела программы. В основном, это время отводится на самостоятельное решение задач. Самостоятельные занятия включают в себя также изучение материалов учебных пособий.

**ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

**программа аспирантуры:** Физические науки  
Физтех-школа Электроники, Фотоники и Молекулярной Физики  
кафедра дискретной математики

**курс:** 1

Семестр, формы промежуточной аттестации: 1 (осенний) - Дифференцированный зачет

**Разработчик:** А.С. Нагорный, канд. физ.-мат. наук, доцент

## 1. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Дискретная математика» обучающийся должен:

### знать:

- Математическое программирование.
- Исследование операций, теория игр.
- Оптимальное управление.
- Дискретная оптимизация.
- Теория функциональных систем.
- Комбинаторный анализ и теория графов.
- Теория кодирования.
- Управляющие системы.
- Дизъюнктивные нормальные формы.
- Синтез и сложность управляющих систем.
- Эквивалентные преобразования управляющих систем.
- Надежность и контроль функционирования управляющих систем.
- Математическая экономика.

### уметь:

- ☐ эффективно использовать на практике теоретические компоненты науки: понятия, суждения, умозаключения, законы.
- ☐ представить панораму методов прикладной дискретной математики.
- ☐ использовать современные средства создания комплексов программ.
- ☐ абстрагироваться от несущественного при математическом моделировании.
- ☐ выбирать методы дискретной математики и кибернетики, подходящие для решения той или иной задачи.

### владеть:

Владеть методами следующих дисциплин.

- Математическое программирование.
- Исследование операций, теория игр.
- Оптимальное управление.
- Дискретная оптимизация.
- Теория функциональных систем.
- Комбинаторный анализ и теория графов.
- Теория кодирования.
- Управляющие системы.
- Дизъюнктивные нормальные формы.
- Синтез и сложность управляющих систем.
- Эквивалентные преобразования управляющих систем.
- Надежность и контроль функционирования управляющих систем.

## 2. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

В течение семестра проводятся устные опросы по материалам предыдущих лекций по следующим темам:

функции алгебры логики;  
функции многозначной логики;  
автоматы-преобразователи (о.-д. функции);  
алгоритмы и их сложность;  
геометрия булева куба.

## 3. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Элементарные функции алгебры логики. Суперпозиция функций.
2. Теорема Поста о полноте в  $P_2$  (с доказательством).
3. Понятия базиса и предполного (максимального) класса в алгебре логики.



4. Следствия из теоремы Поста о полноте.
5. Характеризация функций алгебры логики по предполным классам.
6. Функции многозначной логики. Предикаты. Замкнутость класса функций, сохраняющих заданный предикат.
7. Теорема Кузнецова и следствие из нее. Теорема Янова-Мучника.
8. Предикатное описание предполных классов функций многозначной логики.
9. Предикатное описание и свойства предполных классов трехзначной логики. Свойства элементарных функций трехзначной логики.
10. Аксиомы вложения, примеры аксиом вложения.
11. Предикатное описание и свойства предполных классов четырехзначной логики. Свойства элементарных функций четырехзначной логики.
12. Автоматы-преобразователи (о.-д. функции)
13. Детерминированные функции.
14. Определение веса детерминированной функции. Ограниченно-детерминированные (автоматные) функции (о.-д. функции).
15. Принцип «Разделяй и властвуй!» в теории алгоритмов. Сложность задачи одновременного поиска максимального и минимального элемента в массиве.
16. Задача умножения  $n$ -разрядных двоичных чисел, ее сложность. Теорема о решении рекуррентных соотношений для сложности алгоритмов.
17. Принцип динамического программирования. Задача об оптимальном порядке умножения  $n$  матриц.
18. Порядковые статистики. Алгоритм выбора  $k$ -го наименьшего элемента, его сложность.
19. Среднее значение количества допустимых (максимальных, ядровых) граней размерности  $k$  в характеристическом множестве функции алгебры логики от  $n$  переменных.
20. Дисперсия количества допустимых (максимальных, ядровых) граней размерности  $k$  в характеристическом множестве функции алгебры логики от  $n$  переменных.
21. Теорема о мощности характеристического множества почти всех функций алгебры логики от  $n$  переменных.
22. Цепные и циклические функции. Оценки (верхняя и нижняя) максимально возможной длины цепи (цикла) в  $n$ -мерном булевом кубе. Протяженность связной булевой функции.

#### Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

Оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;

Оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему систематизированные, знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, правильное обоснование принятых решений;

Оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

Оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

Оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

Оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

Оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;

Оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач.

Оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач.

#### **4. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

При проведении дифференцированного зачета обучающемуся предоставляется не менее 30 минут на подготовку. Опрос обучающегося не должен превышать двух астрономических часов.

Во время проведения дифференцированного зачета обучающиеся могут пользоваться программой дисциплины, а также учебной и справочной литературой, персональным компьютером и Internet.